К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ю. Р. Агачев

Казанский государственный университет
juriy.agachev@ksu.ru

Рассмотрим общую линейную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения порядка $m \in N$:

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t) = y(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

$$R_\nu(x) = 0, \quad \nu = \overline{0, m-1}. \tag{2}$$

Здесь $g_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, $y(t)$ – известные функции, интегрируемые по Лебегу в промежутке (a, b), R_ν, $\nu = \overline{0, m-1}$, – линейно-независимые функционалы, определенные на пространстве $(m-1)$-раз непрерывно-дифференцируемых функций. Для указанной задачи будем строить сплайновые и полиномиальные приближения к ее решению.

1. Введем в промежутке $[a, b]$ сетку узлов

$$\Delta_n : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

подчиненную естественному условию

$$\|\Delta_n\| \equiv \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде сплайна [1, 2] степени m на сетке Δ_n. Краевые условия для этого сплайна могут быть произвольными, лишь бы существовал единственный интерполяционный сплайн с соответствующими краевыми условиями, обладающий свойством устойчивости. Как известно (см., напр., в [1, 2]), этот сплайн зависит от $m + n$ неизвестных коэффициентов. Их определим из следующих условий:

$$x_n^{(m)}(t_j) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} g_k(t)\, dt \cdot x_n^{(m-k)}(t_j) =$$

$$= \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} y(t)\,dt, \ j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$$R_\nu(x_n) = 0, \quad \nu = \overline{0, m-1}. \tag{5}$$

Ясно, что (4), (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (кратко: СЛАУ) порядка $m+n$ относительно коэффициентов сплайна $x_n(t)$. Кроме того, вычислительная схема (4), (5) имеет смысл и в случае лишь интегрируемых по Лебегу функций $y(t)$ и $g_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, и достаточно проста для реализации на практике.

2. Приближенное решение задачи (1), (2) ищем в виде алгебраического многочлена $x_n(t)$ степени $n+m-1$, а неизвестные коэффициенты определяем из условий (4), (5), где $\{t_j\}_0^n$ – некоторая система узлов, удовлетворяющих условию (3).

3. Приближенное решение задачи (1), (2) по-прежнему будем искать в виде алгебраического многочлена $x_n(t)$ степени $n+m-1$, а его неизвестные коэффициенты найдем из условий:

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} (Kx_n)(t)\,dt = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} y(t)\,dt, \quad j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$R_\nu(x_n) = 0, \quad \nu = \overline{0, m-1}, \tag{7}$$

где $\{t_j\}_0^n$ – некоторая система узлов из промежутка (a,b).

4. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения:*

1) g_k, $k = \overline{1,m}$, $y \in L_1(a,b)$;

2) сетка узлов Δ_n удовлетворяет лишь условию (3);

3) задача (1), (2) имеет единственное решение при любой интегрируемой правой части.

Тогда, начиная хотя бы с некоторого номера n_0, СЛАУ (4), (5) однозначно разрешима. Приближенные решения $x_n(t)$ сходятся к точному решению $x(t)$ задачи (1), (2) со скоростью

$$\|x - x_n\|_{W_1^{(m)}(a,b)} \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \|x^{(k)} - x_n^{(k)}\|_C +$$

$$+\|x^{(m)} - x_n^{(m)}\|_{L_1(a,b)} = O\left\{\omega(x^{(m)}; \|\Delta_n\|)_1\right\}, \tag{8}$$

где $\omega(x^{(m)}; \|\Delta_n\|)_1$ *есть интегральный модуль непрерывности функции* $x^{(m)}(t)$ *в точке* $\|\Delta_n\|$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения:*

1) g_k, $k = \overline{1,m}$, $y \in L_2(a,b)$;

2) узлы t_k *определяются по формуле*

$$t_k = (a+b)/2 - (b-a)\tau_k/2,\ k = \overline{0,n},$$

где $\tau_0 = -1$, *а* $\{\tau_k\}_{k=1}^n \subset (-1,1)$ *являются нулями многочлена Лежандра степени* n;

3) задача (1), (2) имеет единственное решение при любой интегрируемой с квадратом правой части.

Тогда при всех n, *начиная хотя бы с некоторого* n_0, *СЛАУ (4), (5) имеет также единственное решение. Приближенные решения* $x_n(t)$ *сходятся к точному решению* $x(t)$ *задачи (1), (2) со скоростью*

$$\|x - x_n\|_{W_2^{(m)}(a,b)} \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \|x^{(k)} - x_n^{(k)}\|_C +$$

$$+\|x^{(m)} - x_n^{(m)}\|_{L_2(a,b)} = O\left\{\omega(x^{(m)}; 1/\sqrt{n})_2\right\}, \tag{9}$$

где $\omega(x^{(m)}; \delta)_2$ *есть модуль непрерывности функции* $x^{(m)}(t) \in L_2(a,b)$ *в точке* δ.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения:*

1) $\ln n \left\{\omega(y; 1/n)_1 + \sum_{k=1}^m \omega(g_k; 1/n)_1\right\} \to 0,\ n \to \infty$;

2) узлы t_k *определяются по формуле*

$$t_k = (a+b)/2 + (b-a)\cos(k\pi/n)/2,\ k = \overline{0,n};$$

3) соответствующая однородная задача имеет лишь тривиальное решение.

Тогда при всех достаточно больших n *СЛАУ (6), (7) имеет единственное решение и приближенные решения* $x_n(t)$ *сходятся к точному решению* $x(t)$ *задачи (1), (2) с быстротой*

$$\|x - x_n\|_{W_1^{(m)}(a,b)} = O\left\{\ln n \cdot \omega(x^{(m)}; 1/n)_1\right\} =$$

$$= O\Big\{\ln n \cdot \big[\omega(y; 1/n)_1 + \sum_{k=1}^m \omega(g_k; 1/n)_1\big]\Big\}. \tag{10}$$

5. Доказательство теорем 1 – 3 проводится с помощью общей теории приближенных методов анализа [3] и некоторых результатов из теории приближения сплайнами и полиномами. Остановимся здесь лишь на доказательстве теоремы 1.

Пусть $Y = L_1(a,b)$ с обычной нормой, X – пространство Соболева $W_1^{(m)}(a,b)$ функций $x(t)$, удовлетворяющих краевым условиям (2). Норму в X введем согласно формуле из (8). Тогда задача (1), (2) может быть записана в виде одного операторного уравнения вида

$$Kx \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X,\ y \in Y), \tag{11}$$

где $Gx \equiv x^{(m)}$.

Пусть, далее, $Y_n \subset Y$ есть подпространство сплайнов нулевой степени на сетке Δ_n, а $X_n \subset X$ – подпространство сплайнов вида $x_n(t)$. Тогда вычислительная схема (4), (5) эквивалентна следующему операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv Gx_n + P_n T x_n = Q_n y \quad (x_n \in X_n); \tag{12}$$

здесь $P_n : Y \to Y_n$ – оператор сплайн-интерполирования нулевой степени, $Q_n : Y \to Y_n$ есть оператор "усредненного" сплайн-интерполирования нулевой степени, т.е.

$$(Q_n y)(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} y(t)\,dt \cdot \psi_k(t)/(t_k - t_{k-1}),$$

$\psi_k(t)$ – характеристическая функция промежутка $(t_{k-1}, t_k]$, а

$$T_n x_n \equiv \sum_{k=1}^{m} (Q_n g_k)\, x_n^{(m-k)}.$$

Известно (см., напр., в [4]), что

$$\|y - Q_n y\|_{L_1(a,b)} = O\{\omega(y; \|\Delta_n\|)_1\}.$$

Поэтому в уравнениях (11) и (12) правые части близки по норме пространства $L_1(a,b)$. С учетом свойств операторов P_n и Q_n покажем, что операторы K и K_n близки на подпространстве X_n. Имеем для любого $x_n \in X_n$

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_Y = \|Tx_n - P_n T_n x_n\| \le$$

$$\leq \|Tx_n - T_nx_n\| + \|T_nx_n - P_nT_nx_n\| \equiv J_1 + J_2.$$

Легко видеть, что

$$J_1 = O\{\sum_{k=1}^{m} \omega(g_k; \|\Delta_n\|)_1\} \cdot \|x_n\|_X.$$

Далее,

$$J_2 \leq \sum_{k=1}^{m} \|(Q_ng_k)x_n^{(m-k)} - P_n[(Q_ng_k)x_n^{(m-k)}]\|_{L_1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \|(Q_ng_k)[x_n^{(m-k)} - P_nx_n^{(m-k)}]\| \leq \varepsilon_n \cdot \|x_n\|_X,$$

где $\varepsilon_n = o(\|g_1\|_{L_1}) + \|\Delta_n\| \to 0,\ n \to \infty$.

Таким образом, $\|K - K_n\|_{X_n \to Y} \to 0,\ n \to \infty$. Остальное очевидно.

Для двух других методов доказательство проводится аналогично, при этом используются свойства обычных и "усредненных" операторов алгебраического интерполирования и операторов метода подобластей (см. в [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. *Сплайны в вычислительной математике.* – М.: Наука, 1976. – 248 с.

2. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. *Методы сплайн-функций.* – М.: Наука, 1980. – 352 с.

3. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

4. Агачев Ю. Р. *Сходимость метода подобластей и одного "смешанного" метода для интегральных и дифференциальных уравнений*/ Казан. ун-т. – 49 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.12.86, 9039В86.